Enrico Manfredi, XXVI Ciclo

Relazione scientifica sull'attività di ricerca svolta

Università ospitante: Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia.
Supervisore: Prof. Sergey Matveev.
Durata: 15 marzo 2012 - 15 giugno 2012.

La tematica di ricerca ha riguardato le rappresentazioni e le proprietà dei nodi e link in spazi lenticolari. Per le definizioni di questi oggetti e l'importanza del loro studio, si veda il progetto di ricerca presentato prima della partenza.

Appena arrivato all'università ospitante ho tenuto due seminari per aggiornare il prof. Matveev e gli altri componenti del gruppo di ricerca del mio lavoro. Il primo seminario ha riguardato un nuovo diagramma da me introdotto per link in spazi lenticolari e le rispettive mosse generalizzate di Reidemeister, utili per vedere quando due link sono equivalenti. Nel secondo seminario ho illustrato come si costruiscono i twisted Alexander polynomial per i link in spazi lenticolari. Tali lavori erano già stati sviluppati prima della partenza in collaborazione con Alessia Cattabriga e Michele Mulazzani (1).

La prima parte del percorso di ricerca si è sviluppata attraverso lo studio di invarianti per link in spazi lenticolari: polinomio di Alexander, polinomio di Jones, sollevamento in S^3 e fundamental quandle.

Polinomio di Alexander In seguito al secondo seminario, abbiamo evidenziato come sia difficile trovare delle proprietà del twisted Alexander polynomial, come ad esempio le skein relations, che permettono di calcolare i polinomi in modo iterativo tramite semplificazioni di incroci. Sappiamo inoltre che se un link è locale, allora i twisted Alexander polynomial sono nulli, ma non il viceversa; in particolare riteniamo che sia complicato trovare una dimostrazione di questo fatto, ed un controesempio richiede molti tentativi, per cui è più facile trovarlo con metodi iterativi al computer.

Polinomio di Jones Abbiamo provato a generalizzare il polinomio di Jones ai link in spazi lenticolari (in varie maniere, ad esempio usando le classi di omologia come variabili, oppure mediante la teoria degli skein modules). L'unica generalizzazione possibile ha portato ad un caso particolare di un invariante già noto. Precisamente se prendiamo il nostro diagramma e lo chiudiamo a formare un mixed link diagram con chirurgia intera, possiamo calcolare il colored Jones polynomial (anche chiamato BHMV invariant dalle iniziali dei quattro autori) (2). In particolare ho analizzato nel dettaglio tale articolo ed ho provato a calcolare i polinomi in più esempi per acquisire manualità.

Sollevamento Possiamo vedere la sfera S^3 come un rivestimento regolare di $L(p, q)$. L'immagine inversa di un link $L \subset L(p, q)$ è chiamata sollevamento di L in S^3. Abbiamo sviluppato un procedimento geometrico che ci consente, dato il diagramma di un link in $L(p, q)$, di ottenere un diagramma planare del suo sollevamento in S^3. Tale criterio può essere espresso anche in forma algoritmica con i codici per link, di cui parleremo in seguito. E' interessante studiare il sollevamento perché anche esso è un invariante del link in $L(p, q)$: possiamo calcolare gli invarianti classici (in S^3) del sollevamento e avere già così molte informazioni. Diventa quindi importante studiare il sollevamento, e solamente altri invarianti che non siano indotti da esso.

Altra domanda molto importante è: il sollevamento è un invariante completo? Per S^3 è banale, per $L(2, 1) = \mathbb{R}P^3$ è una congettura già studiata e non risolta, per $L(p, q)$ abbiamo trovato un controesempio, che vale in $L(4, 1)$, grazie ai conti di cui parlerò nella seconda parte della relazione.

Fundamental quandle Il fundamental quandle (risp. rack) di un link in S^3 è un invariante completo, cioé distingue sempre due link non equivalenti. Vale lo stesso anche per il fundamental quandle (rack) del link in $L(p, q)$? I risultati conosciuti dicono che il fundamental quandle (rack) è isomorfo a quello del suo sollevamento in S^3 (quindi per il controesempio del sollevamento, non è un invariante completo). Inoltre l'articolo (3) descrive per bene un invariante completo per link in 3-varietà chiamato augmented rack, che contiene maggiori informazioni del rack, ma non permette di definire invarianti computabili. Abbiamo pertanto studiato con molta attenzione tale articolo per cercare di capire se c'era un collegamento tra rack ed augmented rack (aggiungendo informazioni per evitare il controesempio in $L(4, 1)$).

Sempre su questo filone di ricerca, ho sfruttato anche il lavoro di Dmitry Gorkovets per i link nello spazio proiettivo. Il quandle è lo stesso del sollevamento, quindi non è interessante, ma modificando altri invarianti noti, cioè il biquandle ed il biquandle cocycle invariant, ha costruito invarianti non indotti dal sollevamento. Purtroppo nel mio caso una mossa di Reidemeister non rende invariante la costruzione.

La seconda parte del percorso di ricerca si è diretta invece verso uno studio computazionale dei nodi e link in spazi lenticolari. In particolare sono stati costruiti un codice per maneggiare link in spazi lenticolari a computer, ed una piccola tabulazione di una particolare classe di link in spazi lenticolari.

E' importante notare come se definiamo l'equivalenza di link per isotopia o alternativamente per omeomorfismo di coppie, abbiamo lievi differenze nella tabulazione. In particolare abbiamo studiato l'articolo (4) che ci descrive come si comporta il mapping class group degli spazi lenticolari. Ad esempio è interessante notare che per molti spazi non ci sono omeomorfismi che rovesciano l'orientazione e ad esempio trifoglio destro e sinistro sono sempre distinti.

Codice Prima di iniziare il periodo di ricerca avevo già creato un codice molto rudimentale per i link in spazi lenticolari, che usavo per un programma a computer per calcolare il twisted Alexander polynomial. Durante il periodo di ricerca ho migliorato molto questo codice per accorciarne la lunghezza. Il codice è molto simile al codice di Gauss per link in S^3. Siccome il codice di Gauss è usato per creare chord diagrams associati al link, e calcolare invarianti di Vassiliev (5), ho verificato che nel mio caso i chord diagram non presentano le dovute proprietà di regolarità per poter definire tali invarianti.

Tabulazione Mi sono trovato quindi davanti ad una situazione dove molti invarianti erano già noti, ma non sapevamo le loro proprietà, così abbiamo deciso di iniziare una tabulazione (anche grazie al codice) di una particolare classe di link in spazi lenticolari: i link non orientati, primi, non-split, non locali, a meno di isotopia ambientale.

L'indice di complessità scelto è stato $t+s$ dove t indica la metà dei punti al bordo e s il numero di incroci che presenta il link nel diagramma. Per prima cosa occorre generare tutti i diagrammi possibili. Per fare questo generiamo tutti i possibili t-tangle. Quindi aggiungiamo le condizioni sui punti al bordo. Tutti i possibili t-tangle sono generati seguendo l'articolo (6), e modificandolo opportunamente per estenderlo al caso dei t-tangle non connessi. Poi generiamo tutte le possibili sequenze ammissibili di punti al bordo, e le uniamo ai tangle tenendo conto delle simmetrie.

Abbiamo realizzato a mano una tabulazione per $L(p, 1)$ fino a $t + s = 3$. Tale tabulazione prevede 8 link con 1, 2 o 3 componenti. Il primo risultato interessante trovato è stato che due di questi link, nel caso di $L(4, 1)$, posseggono il medesimo sollevamento, ma hanno diverso numero di componenti (quindi sono necessariamente distinti). (Si prevede di realizzare tale procedura con un programma a computer per poter incrementare $s + t$ e vedere tabulazioni anche per $L(p, q)$ con $q \neq 1$.)

Alla fine ho tenuto un ulteriore seminario sull'articolo "Enumeration of k-tangle projections" per gli studenti dell'ultimo anno di laurea e di dottorato dell'università.

E' importante notare come tutta l'attività descritta sia stata condotta sotto la supervisione del prof. Matveev e con l'aiuto di alcuni suoi studenti di dottorato: Filipp Korablev, Valentin Potapov e Dmitry Gorkovets.

Bibliografia

(1) A. Cattabriga, E. Manfredi, M. Mulazzani, “On knots and links in lens spaces”, in preparazione.

(2) C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, P. Vogel, “Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket”, Topology, Vol. 31, n°4, 1992.

(3) R. Fenn, C. Rourke, “Racks and links in codimension two”, Journ. Of Knot Theory Ram., n°1, 1992.

(4) F. Bonahon, “Diffeotopies des espaces lenticulaires”, Topology, Vol. 22, n°3, 1983.

(5) M. Polyak, O. Viro, ”Gauss Diagram Formulas for Vassiliev Invariants”, International Mathematics Research Notices, n°11, 1994.

(6) A. Bogdanov, V. Meshkov, A. Omelchenko, M. Petrov, Enumerating k-tangle projections, Journ. Of Knot Theory Ram., n°21, 2012.